

**Κατάλογος, περιεχόμενο και βιβλιογραφία  
μεταπτυχιακών μαθημάτων της ειδίκευσης  
«Εφαρμοσμένα Μαθηματικά»**

**A. Μαθήματα κορμού**

E1	Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών I
E2	Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II
E3	Υπολογιστικά Μαθηματικά I
E4	Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
E5	Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα
E6	Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
E7 = Θ7	Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και Δυναμικά Συστήματα
E8 = Θ8	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I

**B. Μαθήματα επιλογής**

E9	Υπολογιστικά Μαθηματικά II
E10	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις II
E11	Εξισώσεις Κυματικής Διάδοσης
E12	Θεωρία Ελέγχου
E13	Μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση και Λογισμός Μεταβολών
E14	Διακριτά Δυναμικά Συστήματα
E15	Υπολογιστική Επιστήμη και Τεχνολογία
E16 = ΣΕΠ13	Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις
E17 = Θ1	Ανάλυση I
E18 = Θ2	Ανάλυση II
E19 = Θ9	Μιγαδική Ανάλυση Μιας Μεταβλητής
E20 = Θ13	Θεωρία Τελεστών
E21 = Θ18	Θεωρία Γραφημάτων
E22 = Θ19	Αρμονική Ανάλυση
E23 = Θ5	Διαφορική Γεωμετρία I
E24 = Θ6	Διαφορική Γεωμετρία II
E25 = Θ25	Ψευδοδιαφορικός Λογισμός
E26 = ΣΕΠ1	Μαθηματική Στατιστική
E27 = ΣΕΠ3	Θεωρία Πιθανοτήτων
Εχψ.α	Ειδικά Θέματα

## E1 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών I

Εισαγωγή στη Διαστατική Ανάλυση και Κανονικοποίηση

- Μέθοδοι Διαταραχών: Κανονική διαταραχή. Ιδιόμορφη διαταραχή. Ανάλυση του οριακού στρώματος. Η προσέγγιση WKB. Ασυμπτωτικά αναπτύγματα ολοκληρωμάτων (ολοκληρώματα Laplace, παραγοντική ολοκλήρωση, μέθοδος στάσιμης φάσης).
- Μοντέλα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων: Εισαγωγικές έννοιες. Εξισώσεις διάχυσης (νόμοι διατήρησης, καταστατικές εξισώσεις, η εξίσωση θερμότητας).
- Εξισώσεις Ισοροπίας (η εξίσωση του Laplace, ολοκληρωτικές ταυτότητες).
- Αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις (το πρόβλημα των ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές, η μέθοδος του Fourier).
- Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί (Laplace, Fourier).

Λογισμός Μεταβολών

- Μεταβολικά Προβλήματα. Συναρτησοειδή. Παραδείγματα. Υπενθυμίσεις των συνθηκών μεγίστου-ελαχίστου πραγματικών συναρτήσεων μίας και περισσότερων πραγματικών μεταβλητών.
- Γραμμικοί χώροι με νόρμα. Παράγωγοι συναρτησοειδών. Πρώτη Μεταβολή. Αναγκαίες συνθήκες για ακρότατα.
- Το απλούστατο πρόβλημα. Εξίσωση Euler. Γενικεύσεις σε συναρτησοειδή με παραγώγους υψηλότερης τάξης, σε συναρτησοειδή με πολλές συναρτήσεις και με συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.
- Προβλήματα πολλαπλών ολοκληρωμάτων. Φυσικές συνοριακές συνθήκες.
- Χαμιλτονιανή θεωρία. Το αντίστροφο πρόβλημα.
- Ισοπεριμετρικά προβλήματα.
- Η δεύτερη μεταβολή. Μία ικανή συνθήκη για ακρότατο.
- Άμεσες μέθοδοι. Ελαχιστοποιούσες ακολουθίες. Μέθοδος Ritz και μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Το πρόβλημα Sturm-Liouville.

### Βιβλιογραφία

- I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, 1963.
- M. H. Holmes, *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Springer, 2009.
- P. J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 2014.
- B. van Brunt, *The Calculus of Variations*, Springer, 2004.
- J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.
- Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2012.
- Ν. Αλικάκος, Γ. Καλογερόπουλος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2003.
- Ν. Αλικάκος, Σημειώσεις.

## E2 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II

- Γραμμικά και μη γραμμικά κύματα, εξίσωση Burgers, ασθενείς λύσεις, συνθήκη Rankine-Hugoniot για κρουστικά κύματα, μέθοδος των χαρακτηριστικών και εφαρμογή σε σχεδόν γραμμικές εξισώσεις.
- Lagrangian και Eulerian περιγραφή, νόμοι διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας, η ακουστική προσέγγιση, εξισώσεις δυναμικής αερίων, κίνηση ρευστών στον  $\mathbb{R}^3$ , θεωρήματα μεταφοράς, θεώρημα Cauchy, εξίσωση Navier-Stokes.
- Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra, εξισώσεις Fredholm με διαχωρίσιμους πυρήνες, συμμετρικοί πυρήνες.
- Συναρτήσεις Green: αντίστροφοι διαφορικών τελεστών, φυσική ερμηνεία, η συνάρτηση Green μέσω ιδιοσυναρτήσεων.
- Εισαγωγή στις κατανομές, συνάρτηση δοκιμής, ορισμός και ιδιότητες κατανομών, λύσεις διαφορικών εξισώσεων με την έννοια των κατανομών.

## Βιβλιογραφία

- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2<sup>nd</sup> edition, AMS, 2010.
- Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2012.
- P. Fife, *A Gentle Introduction to the Physics and Mathematics of Incompressible Flow*, Lecture Notes, 2000. <http://www.math.utah.edu/~fife/gentleb.pdf>
- J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 2002.

## E3 Υπολογιστικά Μαθηματικά I

- Μη γραμμικά συστήματα: Παράγωγος Fréchet. Γενική επαναληπτική μέθοδος, τοπικά θεωρήματα σύγκλισης, Θεώρημα Συστολής. Μέθοδος Νεύτωνα.
- Άμεσες μέθοδοι για γραμμικά συστήματα: Απαλοιφή Gauss με μερική και ολική οδήγηση. Ανάλυση του σφάλματος. Παραγοντοποίηση LU. Μελέτη ευαισθησίας γραμμικών συστημάτων σε διαταραχές. Δείκτης κατάστασης.
- Επαναληπτικές μέθοδοι για γραμμικά συστήματα: Γενικά περί επαναληπτικών μεθόδων. Κλασσικές επαναληπτικές μέθοδοι (Jacobi, Gauss - Seidel, SOR).
- Παρεμβολή: Παρεμβολή κατά Lagrange και Νεύτωνα, σφάλμα παρεμβολής, σύγκλιση, πολυώνυμα Chebyshev και σημεία παρεμβολής. Παρεμβολή με splines.
- Αριθμητική Ολοκλήρωση: Σύνθετοι τύποι του Τραπεζίου και του Simpson. Τύποι εκ παρεμβολής (Newton - Cotes). Τύποι του Gauss.

## Βιβλιογραφία

- Β. Δουγαλής, *Αριθμητική Ανάλυση*: Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος.
- Γ. Ακρίβης, Β. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 4<sup>η</sup> έκδοση, 2015.
- W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Birkhäuser, 2<sup>nd</sup> edition, 2012.
- Σ. Νοτάρης, Σημειώσεις.

## E4 Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

- Θεώρημα προβολής Lax-Milgram. Προσεγγίσεις Galerkin. Χώροι Sobolev στην ευθεία και στον  $\mathbb{R}^n$ .
- Αριθμητική επίλυση συνοριακών προβλημάτων δύο σημείων για Σ.Δ.Ε. με μεθόδους Galerkin πεπερασμένων στοιχείων και μεθόδους διαφορών.
- Αριθμητική επίλυση συνοριακών προβλημάτων για ελλειπτικές εξισώσεις με μεθόδους Galerkin πεπερασμένων στοιχείων.
- Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών για παραβολικές και υπερβολικές εξισώσεις με μεθόδους Galerkin πεπερασμένων στοιχείων και μεθόδους διαφορών.

## Βιβλιογραφία

- V. A. Dougalis, *Finite Element Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations* (course notes, revised ed., 2013).
- Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Β' Έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2013.
- H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- S. C. Brenner, L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2<sup>nd</sup> ed., 2002.
- P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978. (Reprinted, SIAM, 2002).
- V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, 2<sup>nd</sup> ed., 2006.

## E5 Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα

- Ορθογώνια παραγοντοποίηση πινάκων: Μέθοδοι QR, Givens, Gram-Schmidt, Modified Gram-Schmidt και εφαρμογές τους. Μελέτη και ανάλυση των αλγορίθμων και των μεθόδων αυτών.
- Ανάλυση ιδιαιτεριών τιμών και εφαρμογές της. Μελέτη προβλημάτων Ελαχίστων Τετραγώνων.
- Αριθμητικός υπολογισμός ιδιοτιμών πίνακα: υπολογισμός της μορφής Hessenberg ενός πίνακα. Υπολογισμός της πραγματικής μορφής Shur ενός πίνακα.
- Μέθοδοι Krylov και εφαρμογές σε προβλήματα υψηλής διάστασης.

### Βιβλιογραφία

- Μ. Μητρούλη, *Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Αθήνα, 2001.
- Γ. Καλογερόπουλος, *Λογισμός Πινάκων και Εφαρμογές*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Αθήνα, 1995.
- N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Coll Publishing Company, ITM, 1995.
- G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2<sup>nd</sup> ed., John Hopkins University Press, 1989.
- R. Horn, C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, 1986.

## E6 Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

- Χώροι εσωτερικού γινομένου, καθετότητα, ορθοκανονικές βάσεις, ανισότητα Bessel.
- Φραγμένοι τελεστές, θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, ο συζυγής τελεστής, ορθογώνιες προβολές, αυτοσυζυγείς τελεστές.
- Φάσμα. Συμπαγείς τελεστές. Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές. Εφαρμογή στο πρόβλημα Sturm-Liouville. Θεώρημα Lax-Milgram.
- Χώροι Sobolev. Ομαλοποιητές. Ανισότητα Poincaré.
- Ασθενείς λύσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών.
- Θεώρημα Arzelà-Ascoli. Θεώρημα συμπαγούς εμφύτευσης του Rellich.
- Φασματική ανάλυση γραμμικών διαφορικών τελεστών 2<sup>ης</sup> τάξης.

### Βιβλιογραφία

- N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, 1988.
- M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I: *Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- Α. Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2008.
- Γ. Μπαρμπάτης, Σημειώσεις Παραδόσεων.
- E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2<sup>nd</sup> edition, AMS, 2010.

## E7 = Θ7 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και Δυναμικά Συστήματα

- Μη γραμμικά Προβλήματα Αρχικών Τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (θεωρήματα ύπαρξης μοναδικότητας, επεκτασιμότητας, συνεχούς εξάρτησης από αρχικά δεδομένα και από παραμέτρους). Θεωρήματα σταθερού σημείου Banach και Schauder. Θεώρημα Arzelà-Ascoli.
- Ποιοτική θεωρία στο επίπεδο: αυτόνομα συστήματα, σημεία ισορροπίας, ευστάθεια, γραμμικά συστήματα, γραμμικοποίηση, θεώρημα Hartman-Grobman, κανονικά σημεία, θεώρημα κιβωτίου ροής.

- Συναρτήσεις Lyapunov, ευστάθεια, αστάθεια, η Αρχή του LaSalle, συμπεριφορά συστημάτων με μηδενική ιδιοτιμή / με γνήσια φανταστικές ιδιοτιμές. Συστήματα διατήρησης και κλίσης.
- Πρώτα ολοκληρώματα.
- Οριακοί κύκλοι (περιοδικές τροχιές), Θεώρημα Poincaré, Κριτήριο Dulac, Θεώρημα Poincaré-Bendixson, Θεώρημα Levinson-Smith.
- Στοιχεία θεωρίας διακλαδώσεων.

### Βιβλιογραφία

- Ν. Αλικάκος, Γ. Καλογερόπουλος, *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2003.
- V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, M.I.T. Press, 1973.
- G. Birkhoff, G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th ed., Wiley, 1989.
- J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Krieger, 1980.
- J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer, 1991.
- M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Elsevier, 2004.
- Ι. Γ. Στρατής, *Μία εισαγωγή στην Ποιοτική Θεωρία των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*, Σημειώσεις, 1992.

### **E8 = Θ8 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I**

- Εξίσωση του Laplace, Θεμελιώδης Λύση, Θεώρημα Μέσης Τιμής, Χαρακτηρισμός Αρμονικότητας, Αρχή του Μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις, Αρχή του Μεγίστου για τη Λαπλασιανή + όροι 1ης τάξης, Θεώρημα Hopf (συνοριακό λήμμα), Ανισότητα Harnack για αρμονικές συναρτήσεις, Συνάρτηση Green για την Λαπλασιανή, Παραδείγματα (τύπος Poisson στο ημιεπίπεδο), δ-προσεγγίσεις, Συνελίξεις, Θεώρημα Προσέγγισης στον  $L_p$ , Αρχή Dirichlet.
- Εξίσωση Διάχυσης, Θεμελιώδης Λύση, Πρόβλημα Cauchy στον  $\mathbb{R}^n$ , Αρχή του Μεγίστου για την εξίσωση  $u_t = \Delta u$  + όροι χαμηλότερης τάξης, Συνοριακό Λήμμα (Nirenberg).
- Η  $n$ -διάστατη ( $n \geq 1$ ) εξίσωση μεταφοράς, πρόβλημα αρχικών και πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών.
- Η μονοδιάστατη ομογενής κυματική εξίσωση, χαρακτηριστικές, πρόβλημα αρχικών τιμών, η λύση d' Alembert, πεδίο εξάρτησης, πεδίο επιρροής, ενέργεια, μοναδικότητα, πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης, η μη ομογενής εξίσωση, η Αρχή του Duhamel, προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών, ανακλάσεις κυμάτων, επίλυση με χωρισμό μεταβλητών, με μετασχηματισμό Fourier και με μετασχηματισμό Laplace.
- Η  $n$ -διάστατη ( $n \geq 1$ ) ομογενής κυματική εξίσωση, σφαιρικοί μέσοι, λύση σε περιττές και σε άρτιες διαστάσεις, η Αρχή του Huygens, η μη ομογενής εξίσωση, η Αρχή του Duhamel, χρονική εξασθένιση των λύσεων.

### Βιβλιογραφία

- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., A.M.S., 2010.
- G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1995.
- D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.
- F. John, *Partial Differential Equations*, 4th ed., Springer, 1982.
- J. Jost, *Partial Differential Equations*, Springer, 2002.
- M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, 1984.
- W. A. Strauss, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2008.

## E9 Υπολογιστικά Μαθηματικά II

- Προβλήματα Αρχικών Τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Εισαγωγικές έννοιες. Γενικά για τη μέθοδο του Euler, ευστάθεια της μεθόδου του Euler, Προκαταρκτικά: Συμβολισμός και παραδείγματα για τις μεθόδους Runge-Kutta, επιλυσιμότητα και ευστάθεια των μεθόδων Runge-Kutta, τάξη ακρίβειας και σύγκλιση των μεθόδων Runge-Kutta. Πολυβηματικές μέθοδοι: παραδείγματα, τάξη ακρίβειας, ευστάθεια, σύγκλιση. Άκαμπτα προβλήματα, απόλυτη ευστάθεια, A-ευστάθεια, αλγεβρική ευστάθεια.
- Συνοριακά Προβλήματα Δύο Σημείων για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2ης Τάξης. Εισαγωγή - Θεωρία, Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, Μέθοδοι σκόπευσης, Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων.

### Βιβλιογραφία

- Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Β' Έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2013.

## E10 = Θ32 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις II

- Χώροι Sobolev. Ασθενείς παράγωγοι. Στοιχειώδεις ιδιότητες. Θεωρήματα Προσέγγισης. Επεκτάσεις. Ίχνη. Ανισότητες Sobolev, Gagliardo-Nirenberg. Ανισότητα Morrey. Συμπάγια. Ανισότητες τύπου Poincaré. Ανισότητα Hardy.
- Ελλειπτικές εξισώσεις 2ης τάξης. Ασθενείς λύσεις. Θεώρημα Lax-Milgram. Θεωρία Ομαλότητας στον  $L^2$ . Θεωρία De Giorgi-Moser.

### Βιβλιογραφία

- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010.
- L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1991.
- D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.
- L. C. Evans, *Estimates for Second Order Elliptic Equations*, (Handwritten) Lecture notes.
- R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Academic Press, 2005.
- F. Demengel, G. Demengel, *Function Spaces of the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, 2012.
- J. Jost, *Partial Differential Equations*, Springer, 2002.
- H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, 2nd edition, American Mathematical Society, 2017.

## E11 Εξισώσεις Κυματικής Διάδοσης

- Γραμμικές κυματικές εξισώσεις και σχέσεις διασποράς. Η μέθοδος του Μετασχηματισμού Fourier. Χαρακτηριστικές καμπύλες. Αποσβεστικά (αναλωτικά) συστήματα, αστάθεια και διάχυση.
- Παρουσίαση μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων με ή χωρίς διασπορά. Σχεδόν γραμμικές εξισώσεις.
- Η εξίσωση Burgers. Κρουστικά κύματα και συνθήκες Rankine-Hugoniot.
- Η εξίσωση Korteweg-deVries (KdV). Το πρόβλημα Fermi-Pasta-Ulam και η σύνδεση με την KdV. Το πρόβλημα των αβαθών υδάτινων κυμάτων. Περιοδικές λύσεις και σολιτόνια της KdV.
- Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Μη γραμμική οπτική και το πρόβλημα των βαθέων υδάτινων κυμάτων. Εστιάζουσα και αφεστιάζουσα εκδοχή της NLS. Αστάθεια διαμόρφωσης (Benjamin-Feir). Φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια.
- Μη γραμμικές εξισώσεις Klein-Gordon. Φυσική προέλευση, μοντέλα και σολιτόνια. Σολιτόνια τύπου kink και πνοές (breathers).

- Μετασχηματισμός αντίστροφης σκέδασης. Ζεύγη Lax και η τεχνική AKNS. Εφαρμογή στην εξίσωση KdV.
- Θεωρία διαταραχών. Ασυμπτωτικές αναγωγές των διαφόρων εξισώσεων μεταξύ τους: από την KdV στην NLS, από την NLS στην KdV, από την Klein-Gordon στην NLS, κλπ. Θεωρία διαταραχών για μη γραμμικά κύματα και σολιτόνια.
- Αυστηρή θεωρία ασθενών λύσεων: ολική ύπαρξη λύσεων της NLS στην υποκρίσιμη περίπτωση, ύπαρξη ιδιόμορφων λύσεων στην υπερκρίσιμη περίπτωση, η κρίσιμη περίπτωση.

### Βιβλιογραφία

- M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves. Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press, 2011.
- G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, 1974.
- P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, 1989.
- C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer, 1999.
- G. Fibich, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer, 2015.

Εναλλακτικά, το μάθημα μπορεί να προσφερθεί με το ακόλουθο περιεχόμενο και αντίστοιχη βιβλιογραφία:

- Ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά και ελαστικά κυματικά πεδία με αρμονική χρονική εξάρτηση: ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις εσωτερικού και εξωτερικού πεδίου για τις εξισώσεις Helmholtz, Maxwell και "ανηγμένη" Navier.
- Ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου, πλάτος και ενεργειακή διατομή σκέδασης.
- Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης προβλημάτων σκέδασης: το Λήμμα του Rellich, δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις, Θεωρία Fredholm, Θεωρία Χαμηλών Συχνοτήτων.
- Βασικά θεωρήματα σκέδασης: το θεώρημα αμοιβαιότητας, το γενικό και το οπτικό θεώρημα για επίπεδα και για σφαιρικά κύματα.
- Κυματικές συναρτήσεις Herglotz και τελεστής μακρινού πεδίου: Εφαρμογή στην επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης.

### Βιβλιογραφία

- F. Cakoni, D. Colton, *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*, Springer, 2006.
- D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley, 1983.
- G. Dassios, R. Kleinman, *Low Frequency Scattering*, Oxford University Press, 2000.
- A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, 1996.
- Χ. Ε. Αθανασιάδης, *Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης*, Ε.Α.Π, Πάτρα, 2014.
- G. F. Roach, I. G. Stratis, A. N. Yannacopoulos, *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*, Princeton University Press, 2012.

## E12 Θεωρία Ελέγχου

- Στοιχεία μοντελοποίησης φυσικών συστημάτων από την Μηχανική και τον Ηλεκτρισμό.
- Δυναμικά Συστήματα, Συστήματα χώρου κατάστασης, Γραμμικά Συστήματα, Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, Πίνακας μεταφοράς και Εκθετική συνάρτηση, Θεωρία μετασχηματισμού Laplace, Κρουστική απόκριση, Συνάρτηση Μεταφοράς, Συνάρτηση Συχνοτήτων.
- Θεωρία πραγμάτωσης φυσικών συστημάτων. Μετασχηματισμοί Ισοδυναμίας, Λύση Δυναμικών Εξισώσεων.
- Συστήματα ανάδρασης, Συνδεσμολογία συστημάτων, Διαγράμματα βαθμίδων, Οι βασικοί στόχοι σχεδίασης συστημάτων ανάδρασης.
- A-αναλλοίωτοι υπόχωροι και (A,B)-αναλλοίωτοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^n$ .
- Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα, Ελέγχιμος και μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος, Κανονική μορφή Kalman, Θεωρία ανάδρασης κατάστασης, μετατόπιση πόλων συστήματος σε επιθυμητές θέσεις, Παρατηρητές.

- Εισαγωγή στον Βέλτιστο Έλεγχο: Το πρόβλημα γραμμικού-τετραγωνικού ρυθμιστή (LQR), ο βέλτιστος εκτιμητής Kalman, η αλγεβρική εξίσωση Riccati και η επίλυση της, ο πίνακας Hamiltonian, το πρόβλημα LQG και η αρχή διαχωρισμού.
- Ευστάθεια Δυναμικών Συστημάτων, Θεωρία Lyapunov, Έλεγχος μη-γραμμικών συστημάτων, γραμμική προσέγγιση στα σημεία ισορροπίας τους.

### Βιβλιογραφία

- Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Σημειώσεις στην Κλασική Θεωρία Δεσμών Πινάκων με εφαρμογές στα γενικευμένα συνήθη (regular) συστήματα*, 2003.
- Γ. Χαλικιάς, *Σημειώσεις Θεωρίας Ελέγχου*, 2015.
- Π. Ν. Παρασκευόπουλος, *Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο*, Τόμος Α: Θεωρία, Τόμος Β: Εφαρμογές, Αθήνα 2001.
- T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Inc. 1980.
- P. J. Antsaklis, A. N. Michel, *Linear Systems*, McGraw-Hill International Editions, 1998.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Pearson Education Ltd, 2014.
- Ε. Σ. Γρίσπος, Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Μαθήματα Θεωρίας Ελέγχου*, Σημειώσεις παραδόσεων, Αθήνα 1995.

### E13 Μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση και Λογισμός Μεταβολών

- Το πρόβλημα του Plateau (Γεωμετρική Θεωρία Μέτρου)
- 1ος και 2ος τύπος μεταβολής της περιμέτρου. Αλυσίδες ύφεσης. Νόρμα του Whitney. Κάτω ημισυνέχεια της μάζας. Θεώρημα Παραμόρφωσης και Επακόλουθα. Ύπαρξη. Τύπος Συνεμβαδού και Εφαρμογές. Ο τύπος της Μονοτονίας-Εφαπτόμενοι Κώνοι. Δομή Ελαχιστικών Κώνων. Ενισχυμένη Μονοτονία - Επιμετρική Ανισότητα. Ο επόμενος όρος στο ανάπτυγμα της πυκνότητας. λ-ελάχιστα (Almgren). Μοναδικότητα Εφαπτόμενου Κώνου. Ομαλότητα. Ο Κώνος του Simons. η-επιμετρικοί κώνοι. Το Βασικό Θεώρημα Ομαλότητας.
- Μη Γραμμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Συνδέουσες Τροχιές - Χαμιλτονιανό Σύστημα. Η Βαθμωτή Περίπτωση. Η Εκτίμηση Modica. Η Απόδειξη της Εικασίας De Giorgi από τους Ambrosio και Cabré. Ανάλογα Ελαχιστικών Επιφανειών (Jerison-Monneau). Η Διανυσματική Περίπτωση. Τανυστής Ενέργειας - Θεώρημα τύπου Liouville. Χαμιλτονιανές Ταυτότητες. Ισομεταβλητές λύσεις για ομάδες ανάκλασης στο  $\mathbb{R}$ .

### Βιβλιογραφία

- B. White, *Διαλέξεις Γεωμετρικής Θεωρίας Μέτρου*, Stanford University.
- L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian National University Press.
- K. Ecker, *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*, Birkhäuser.
- D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2<sup>nd</sup> edition.
- Ν. Αλικάκος, Σημειώσεις.
- Άρθρα των:
  - Αλικάκου-Fusco
  - Αλικάκου-Betelu-Chen
  - Ambrosio-Cabré
  - Berestycki-Caffarelli-Nirenberg
  - Caffarelli-Garofalo-Segala
  - Jerison-Monneau



## E14 Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

- Εισαγωγή στις εξισώσεις Διαφορών: Ορισμοί, Παραδείγματα, Παραγωγή εξισώσεων διαφορών, Τελεστές  $\Delta$  και  $E$ , Γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις 1ης τάξης.
- Σημεία Ισορροπίας, Ευστάθεια: Ορισμοί και παραδείγματα, Ευστάθεια Lyapunov, ασυμπτωτική ευστάθεια, άνω και κάτω ημι-ευστάθεια, Κριτήρια ευστάθειας, Περιοδικότητα, Διακλαδώσεις-Χάος.
- Γραμμικές Εξισώσεις και Συστήματα Διαφορών: Ορισμοί και βασικές προτάσεις, Ομογενείς και μη ομογενείς εξισώσεις, Προβλήματα συνοριακών τιμών.
- Οριακή συμπεριφορά λύσεων και ευστάθεια.
- Μελέτη εξίσωσης  $n$ -τάξης μέσω ισοδύναμου συστήματος 1ης τάξης.
- Αυτόνομα και μη αυτόνομα γραμμικά συστήματα. Μέθοδοι επίλυσης και παραδείγματα.
- Μετασχηματισμός  $Z$ : Ορισμοί και παραδείγματα, Δυναμοσειρές και περιοχή σύγκλισης, Ιδιότητες μετασχηματισμού  $Z$ , Αντίστροφος μετασχηματισμός  $Z$ , λύσεις εξισώσεων και συστημάτων διαφορών. Ποιοτική θεωρία μετασχηματισμού  $Z$ .
- Μη γραμμικά συστήματα: Σημεία Ισορροπίας, Θεωρία ευστάθειας Lyapunov, Παραδείγματα και Εφαρμογές.
- Κριτήρια ευστάθειας γραμμικών συστημάτων.
- Εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου: Δυναμικά συστήματα, Εξισώσεις καταστάσεως χώρου, Συνάρτηση μεταφοράς και συνάρτηση συχνότητας, Διακριτοποίηση συνεχούς συστήματος, Θεωρία πραγματοποίησης διακριτών δυναμικών συστημάτων, Ελεγχιμότητα, Παρατηρησιμότητα, Ανάδραση καταστάσεων, Παρατηρητές, Αρχή διαχωρισμού.
- Εισαγωγή στα στοχαστικά διακριτά δυναμικά συστήματα και εφαρμογές.

### Βιβλιογραφία

- Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- Γ. Χαλικιάς, *Σημειώσεις Διακριτών Δυναμικών Συστημάτων*, 2015.
- P. J. Antsaklis, A. N. Michel, *Linear Systems*, McGraw-Hill International Editions, 1998.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Pearson Education Ltd, 2014.
- K. Ogata, *Discrete-time Control Systems*, Pearson Education Ltd, 2015.

## E15 Υπολογιστική Επιστήμη και Τεχνολογία

- Προσομοίωση, σφάλματα, αριθμητική υπολογιστών.
- Ιεραρχίες μνήμης, οι πυρήνες BLAS.
- Αλγόριθμοι εφαρμοσμένης γραμμικής άλγεβρας, LAPACK.
- Μέθοδοι Monte Carlo.
- Προβλήματα αρχικών τιμών και συνοριακά προβλήματα για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.
- Μη γραμμικές εξισώσεις πολλών μεταβλητών.
- Υπολογισμοί με αραιούς πίνακες και εφαρμογές σε μερικές διαφορικές εξισώσεις και σε επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Επαναληπτικές μέθοδοι Krylov, πολυπλεγματικές μέθοδοι.

### Βιβλιογραφία

- G. Strang, *Computational Science and Engineering*, Wellesley-Cambridge Press, 2007.
- D. P. O'Leary, *Scientific Computing with Case Studies*, SIAM, 2009.

## E16 = ΣΕΠ13 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

- Αναδρομή σε βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών.
- Διαδικασίες martingale. Ορισμός, παραδείγματα, χρόνοι στάσης, επιλεκτική στάση, σύγκλιση διαδικασιών martingale, ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες martingale.
- Κίνηση Brown. Ορισμός, ιδιότητες, ιδιότητα Markov, ιδιότητες martingale της κίνησης Brown, χαρακτηρισμός της κίνησης Brown (θεώρημα του Levy).
- Εισαγωγή στη στοχαστική ολοκλήρωση. Το ολοκλήρωμα του Ito επάνω στην κίνηση Brown. Ιδιότητες. Το λήμμα του Itô. Διαδικασίες Itô. Γενικεύσεις για ολοκλήρωση επάνω σε martingales και semimartingales.
- Εισαγωγή στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Ισχυρές και ασθενείς λύσεις. Αλλαγή μέτρου (το θεώρημα του Girsanov). Ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Σχέση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με εξισώσεις με μερικές παραγώγους, αναπαράσταση Feynman-Kac. Εφαρμογές στην χρηματοοικονομική (αποτίμηση παραγώγων).

### Βιβλιογραφία

- Øksendal B., *Stochastic Differential Equations, An Introduction*. 6<sup>th</sup> edition, Springer, 2003.
- Γιαννακόπουλος Α., *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική*. Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση. 2003. [http://users.uoa.gr/~dcheliotis/stox\\_diadikasies\\_II.pdf](http://users.uoa.gr/~dcheliotis/stox_diadikasies_II.pdf)
- Χελιώτης Δ., *Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2015.

## E17 = Θ1 Ανάλυση Ι

- Χώροι μέτρου (λήμμα Borel-Cantelli, μη ατομικά μέτρα, πλήρεις χώροι μέτρου, μετρήσιμες συναρτήσεις).
- Εξωτερικά μέτρα (η έννοια του εξωτερικού μέτρου, το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}^n$ , κατασκευή μέτρου Lebesgue στον  $\mathbb{R}^n$ , σύγκριση των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue).
- Ολοκλήρωμα (ολοκλήρωση συνάρτησης, θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue, θεώρημα Beppo Levi και λήμμα Fatou, θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue).
- Τρόποι σύγκλισης ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων (βασικές έννοιες και προτάσεις, θεωρήματα Egoroff και Riesz).
- Μέτρα γινόμενο - θεώρημα Fubini (ορισμός του μέτρου γινόμενο και ολοκλήρωση ως προς αυτό). Συνέλιξη. Εισαγωγή στον μετασχηματισμό Fourier.
- Οι χώροι  $L_p$  (κυρτές συναρτήσεις και ανισότητα Jensen, ανισότητες Minkowski και Hölder, ορισμός και βασικές ιδιότητες των χώρων  $L_p(\mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , οι χώροι  $L_p([a, b])$  και προσέγγιση με συνεχείς συναρτήσεις, τα βασικά θεωρήματα παρεμβολής (Marcinkiewicz και Riesz-Thorin)).
- Θεώρημα Radon-Nikodym και εφαρμογές. Απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue.
- Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

### Βιβλιογραφία

- Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 2005.
- D. L. Cohn, *Measure Theory* (2nd edition), Birkhäuser, 2013.
- G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications* (2nd edition), Wiley, 1999.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

## E18 = Θ2 Ανάλυση II

- Χώροι με νόρμα (βασικές ιδιότητες, γραμμικοί τελεστές, παραδείγματα χώρων με νόρμα, οι χώροι  $c_0$ ,  $\ell_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , θεώρημα Hahn-Banach, εφαρμογές του θεωρήματος Hahn-Banach, θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, θεώρημα κλειστού γραφήματος, αρχή ομοιόμορφου φράγματος, θεώρημα Banach-Steinhaus, χώροι πηλίκια, προβολές).
- Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (βασικές έννοιες, γραμμικοί τελεστές, το συναρτησοειδές του Minkowski, το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, τοπικά κυρτοί χώροι: παραδείγματα).
- Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους με νόρμα.
- Συμπάγεια και αυτοπάθεια σε χώρους Banach (θεώρημα Alaogλου-Banach, θεώρημα Goldstine, συζυγείς τελεστές).
- Κυρτότητα (θεώρημα Mazur, θεώρημα Krein-Milman, εφαρμογές).
- Ο δυϊκός του  $C(K)$  (θεώρημα αναπαράστασης του Riesz).
- Ειδικά θέματα.

### Βιβλιογραφία

- J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1997.
- Σ. Μερκουράκης, *Μεταπτυχιακή Ανάλυση II*, <http://eclass.uoa.gr/modules/document/?course=MATH362>
- Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997, Αθήνα.
- W. Rudin, *Functional Analysis* (2nd edition), McGraw-Hill, 1991.

### Πρόσθετη Βιβλιογραφία

- H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, J. Pelant, V. Montesinos, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry*, Springer, 2001.
- M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory: The basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011.
- P. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, 2002.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, 2011.

## E19 = Θ9 Μιγαδική Ανάλυση μίας Μεταβλητής

- Αρχή ορίσματος, θεωρήματα Rouché και Weierstrass, θεώρημα Hurwitz και εφαρμογές, ανοικτή απεικόνιση, τοπική δομή, αρχή μεγίστου και εφαρμογές στην άλγεβρα του δίσκου, λήμμα Schwarz, επεκτάσεις θεωρήματος Morera.
- Σφαιρικό θεώρημα Cauchy. Γενικευμένο ανάπτυγμα Laurent.
- Αρμονικές συναρτήσεις, πυρήνες Poisson.
- Αρχή ανάκλασης, θεώρημα Mittag-Leffler, απειρογινόμενα, θεώρημα διπλής σειράς του Vitali, τύπος και ανισότητα Jensen.
- Θεώρημα Montel, θεώρημα σύμμορφης απεικόνισης του Riemann, τόποι πεπερασμένης συνεκτικότητας.
- Θεώρημα Runge και γενίκευση θεωρημάτων Mittag-Leffler και Weierstrass.

### Βιβλιογραφία

- L. Ahlfors, *Complex Analysis* (3rd edition), McGraw-Hill, 1979.

- W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3rd edition), McGraw-Hill, 1987.
- Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*, Εκδ. Συμμετρία, 1993.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.
- Σ. Μερκουράκης, Τ. Χατζηαφράτης, *Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, Συμμετρία, 2005.

### E20 = Θ13 Θεωρία Τελεστών

- Χώροι με νόρμα, χώροι Hilbert, παραδείγματα.
- Ειδικές κατηγορίες τελεστών σε έναν χώρο Hilbert.
- Αναλλοίωτοι υπόχωροι.
- Το φάσμα.
- Συνεχείς συναρτήσεις ενός αυτοσυζυγούς τελεστή.
- Το φασματικό θεώρημα.
- Τοπολογίες στον  $B(H)$ .
- Επιλογή από: εισαγωγή στις άλγεβρες τελεστών, αβελιανές άλγεβρες von Neumann, θεωρία διαστολής.

### Βιβλιογραφία

- R. Beals, *Topics in Operator Theory*, The University of Chicago Press, Chicago, 1971.
- J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1997.
- K. Davidson, *C\*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.
- R. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory* (2nd edition), Springer, 1998.
- J. A. Erdos, *C\*-Algebras*, στο: *Άλγεβρες Τελεστών και Κβαντική Μηχανική*, επιμέλεια Μ. Ανούσης, Σπ. Κωτσάκης, Ν. Χατζησάββας, Εκδόσεις Ζήτη, 1997.
- R. Kadison, J. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* (2 Vols), American Mathematical Society, 1997.
- Α. Κατάβολος, *Σημειώσεις Θεωρίας Τελεστών*, Αθήνα 1993, 2η έκδοση 2000.
- Α. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών (Μεταπτυχιακές Σημειώσεις)*, Αθήνα 2016.  
<http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH123>
- Α. Κατάβολος, *Άλγεβρες von Neumann και Μη Φραγμένοι Τελεστές*, στο: *Άλγεβρες Τελεστών και Κβαντική Μηχανική*, επιμέλεια Μ. Ανούσης, Σπ. Κωτσάκης, Ν. Χατζησάββας, Εκδόσεις Ζήτη, 1997.
- G. Murphy, *C\*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.
- V. S. Sunder, *Functional analysis. Spectral theory*, Birkhäuser, 1997.
- M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, 2002.
- H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant Subspaces* (2nd edition), Dover, 2003.
- W. Rudin, *Functional Analysis* (2nd edition), McGraw-Hill, 1991.

### E21 = Θ18 Θεωρία Γραφημάτων

- Ισομορφισμοί, αυτομορφισμοί, ομάδες αυτομορφισμών.
- Μετασηματισμοί και σχέσεις σε γραφήματα.
- Βαθμοί, πυκνότητα, ελαχιστομέγιστο θεώρημα εκφυλισμού.
- Μονοπάτια, κύκλοι, διάμετρος, ακτίνα, κέντρο, απόκεντρο, περιφέρεια, περίμετρος.
- Συνεκτικότητα, δυσυνεκτικά γραφήματα, το θεώρημα του Menger, το θεώρημα του Tutte για την 3-συνεκτικότητα.
- Δάση και δέντρα, δεντροπαράγοντες.

- Επίπεδα γραφήματα, τοπολογικός ισομορφισμός, δυικά γραφήματα, πυκνότητα και επιπεδότητα, το θεώρημα του Kuratowski.
- Χρωματισμοί γραφημάτων, χρωματικότητα και εκφυλισμός, το θεώρημα του Heawood, το θεώρημα του Erdős για την περιφέρεια και τον χρωματικό αριθμό.
- Η εικασία του Hadwiger.
- Κλίκες, ανεξάρτητα σύνολα, αριθμοί Ramsey.
- Καλύμματα, ταιριάσματα, τέλεια γραφήματα. Το θεώρημα του Lovász για τα τέλεια γραφήματα, το θεώρημα του Dilworth.
- Μονοπάτια Euler και Hamilton.
- Η πιθανοτική τεχνική, τυχαία γραφήματα.
- Ακραία γραφοθεωρία, τοπολογική θεωρία γραφημάτων.
- Η θεωρία των ελασσόνων γραφημάτων.

### Βιβλιογραφία

- R. Diestel, *Graph Theory*, 4th edition, Springer, 2012.
- J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer, 2008.
- Δ. Θηλυκός, *Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων*, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

## E22 = Θ19 Αρμονική Ανάλυση

Προαπαιτούμενες γνώσεις: πραγματική ανάλυση, στοιχειώδης θεωρία μέτρου.

- Σειρές Fourier: βασικές ιδιότητες, σημειακή, ομοιόμορφη και  $L_p$ -σύγκλιση, μέθοδοι αθροισμότητας, πυρήνες αθροισμότητας και προσεγγίσεις της μονάδας.
- Μετασχηματισμός Fourier στον  $\mathbb{R}^n$ : μετασχηματισμός Fourier στον  $L_1$ , τύπος αντιστροφής, ο χώρος του Schwartz, μετασχηματισμός Fourier στον  $L_2$  και το θεώρημα Plancherel, τύπος Poisson.
- Θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin και ανισότητα Hausdorff–Young.
- Αρμονικές συναρτήσεις στον δίσκο και ο πυρήνας του Poisson.
- Χώροι Hardy στον κύκλο και στην ευθεία και θεώρημα F. και M. Riesz.
- Μεγιστική συνάρτηση Hardy–Littlewood.
- Μετασχηματισμός Hilbert: θεώρημα παρεμβολής Marcinkiewicz, διάσπαση Calderón–Zygmund, ο μετασχηματισμός Hilbert στον  $L_1$  και τους  $L_p$ .

### Βιβλιογραφία

- H. Helson, *Harmonic analysis* (2nd edition), Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
- G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications* (2nd edition), Wiley, 1999.
- Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis* (3rd edition), Cambridge University Press, 2004.
- W. Rudin, *Functional Analysis* (2nd edition), McGraw-Hill, 1991.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3rd edition), McGraw-Hill, 1987.
- E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis. An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- C. Muscalu, W. Schlag, *Classical and Multilinear Harmonic Analysis*, Vol. I, Cambridge University Press, 2013.
- L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis* (3rd edition), Springer, 2014.

### Πρόσθετη Βιβλιογραφία

- E. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.

- E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
- H. Dym, H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.

### E23 = Θ5 Διαφορική Γεωμετρία I

- Διαφορικές πολλαπλότητες και υποπολλαπλότητες.
- Εμφυτεύσεις και εμβαπτίσεις.
- Διαμερίσεις της μονάδας.
- Διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες.
- Κατανομές και το θεώρημα Frobenious.
- Ομάδες Lie και άλγεβρες Lie.
- Διαφορικές μορφές.

#### Βιβλιογραφία

- W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston, 1970.
- F. Warner, *Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer 1980.

### E24 = Θ6 Διαφορική Γεωμετρία II

- Μετρικές Riemann.
- Συνοχές-Παράλληλη μετατόπιση.
- Γεωδαισιακές.
- Καμπυλότητα-Χώροι σταθερής καμπυλότητας.
- Πεδία Jacobi και συζυγή σημεία. Θεωρήματα πληρότητας.
- Ισομετρίες.
- Πρώτη και δεύτερη μεταβολή του μήκους τόξου.

#### Βιβλιογραφία

- M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- B. O' Neil, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.

### E25 = Θ25 Ψευδοδιαφορικός Λογισμός

- Μετασχηματισμός Fourier και χώροι Sobolev, το θεώρημα του Sobolev και το λήμμα του Rellich.
- Ψευδοδιαφορικοί τελεστές στον  $\mathbb{R}^n$ , σύμβολα και λογισμός συμβόλων.
- Ο πυρήνας Schwartz ενός ψευδοδιαφορικού τελεστή.
- Ψευδοτοπικότητα, σύνολα κυματικού μετώπου και απεριόριστα παραγωγίσιμοι ψευδοδιαφορικοί τελεστές.
- Διάδοση ιδιομορφιών.
- Το θεώρημα του Hörmander.

#### Βιβλιογραφία

- L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vols 3, 4, Springer, 1985.
- X. Saint Raymond, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, 1991.
- M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, 1981.

- F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential Operators and Fourier Integral Operators*, Vol. 1: *Pseudodifferential Operators*, Plenum, 1980.

### E26 = ΣΕΠ1 Μαθηματική Στατιστική

- Μονοπαραμετρική και Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών πλήρους (full rank) και μη πλήρους τάξης.
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, Αμεροληψία, Επάρκεια, Ελάχιστη Επάρκεια, Πληρότητα, Αμερόληπτες Εκτιμήτριες Ελάχιστης Διασποράς, Μονοδιάστατη και Πολυδιάστατη Ανισότητα Cramer-Rao, Αποτελεσματικές Εκτιμήτριες, Θεωρήματα Rao-Blackwell και Lehmann-Scheffe, Βοηθητικές στατιστικές συναρτήσεις (Ancillary) και Θεώρημα Basu, Εκτιμήτριες Μέγιστης Πιθανοφάνειας και ασυμπτωτική κανονικότητα αυτών, Εκτιμήτριες Ροπών, Εφαρμογές.
- Γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης με χρήση της Αντιστρεπτής Ποσότητας (Pivotal Quantity) και εφαρμογές στην εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης ίσων ουρών και ελαχίστου μήκους. Ύπαρξη Αντιστρεπτών Ποσοτήτων.
- Κατασκευή ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος και της ασυμπτωτικής κανονικότητας των εκτιμητριών μέγιστης πιθανοφάνειας.
- Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων: βασικές έννοιες και ορισμοί (Είδη Υποθέσεων, Κρίσιμη Περιοχή, Μέγεθος Ελέγχου, Επίπεδο Σημαντικότητας, Πιθανότητες Σφαλμάτων τύπου I και II, Ισχύς), Η έννοια του Ομοιόμορφα Ισχυρότατου Ελέγχου, Λήμμα Neyman-Pearson, Επάρκεια και Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι, Η ιδιότητα του Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών MLR (Monotone Likelihood Ratio), Εκθετική Οικογένεια Κατανομών και ιδιότητα MLR, Κατασκευή Ομοιόμορφα Ισχυρότατων Ελέγχων με χρήση της ιδιότητας MLR, Θεώρημα Karlin-Rubin, Κατασκευή ελέγχων με το κριτήριο του Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών, Επάρκεια και Γενικευμένος Λόγος Πιθανοφανειών, Εφαρμογές.

### Βιβλιογραφία

- Bickel, P.J., Doksum, K.A. (2001). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Vol. 1, 2nd edition, Prentice Hall.
- Casella, G., Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference*, 2nd edition, Duxbury Press.
- Lehmann, E.L. (1999) *Elements of Large-Sample Theory*. Springer.
- Lehmann, E.L., Casella, G. (2003). *Theory of Point Estimation*, 2nd edition, Springer.
- Lehmann, E.L., Romano, J.P. (2008). *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd edition, Springer.

### E27 = ΣΕΠ3 Θεωρία Πιθανοτήτων

- Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας και Ιστορική Αναδρομή. Βασικές Ιδιότητες της Πιθανότητας, Ανεξαρτησία ενδεχομένων και κλάσεων ενδεχομένων, Θεώρημα του Dynkin. Λήμματα Borel-Cantelli και Νόμος 0-1 του Kolmogorov για την τελική  $\sigma$ -άλγεβρα ανεξάρτητης ακολουθίας ενδεχομένων.
- Τυχαίες μεταβλητές και ανεξαρτησία, παραγόμενη  $\sigma$ -άλγεβρα, θεωρήματα επέκτασης της Ανεξαρτησίας, Νόμος 0-1 του Kolmogorov για τυχαίες μεταβλητές. Είδη συναρτήσεων κατανομής, επαγόμενος χώρος πιθανότητας, Θεώρημα Ύπαρξης του Kolmogorov, πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομής. Χώροι γινόμενο και σχέση αυτών με ανεξάρτητα πειράματα τύχης.
- Ολοκλήρωμα Lebesgue και βασικά θεωρήματα (Μονότονης και Κυριαρχημένης Σύγκλισης, Λήμμα Fatou, Θεώρημα Borel-Levi). Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής ως Ολοκλήρωμα Lebesgue και εφαρμογές: Διασπορά, ροπές ανωτέρας τάξεως. Η μέση τιμή ως ολοκλήρωμα στον επαγόμενο χώρο και σχετικές ανισότητες (Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Jensen, Lyapunov). Σύγκλιση ροπών και Ομοιόμορφη Ολοκληρωσιμότητα. Θεώρημα Tonelli-Fubini, Συνέλιξη συναρτήσεων κατανομής και πυκνοτήτων.

- Τρόποι σύγκλισης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών (ισχυρή, κατά πιθανότητα, κατά κατανομή, στον  $L_p$ ) και σχέσεις αυτών. Ασθενής και Ισχυρός Νόμος των μεγάλων αριθμών για ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, Μεγιστική Ανισότητα του Kolmogorov. Ισχυρός νόμος για ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία με πεπερασμένη μέση τιμή. Θεώρημα εμφύτευσης του Skorohod. Θεώρημα του Slutsky.
- Η Χαρακτηριστική συνάρτηση ως βασικό εργαλείο για τη μελέτη αθροισμάτων ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών. Σχέση χαρακτηριστικής συνάρτησης και ροπών. Θεωρήματα Αντιστροφής και Συνεχείας.
- Κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Levy για ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και στατιστικές εφαρμογές με τη μέθοδο Delta. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Feller για τριγωνικές ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Συνθήκη του Lindeberg, συνθήκη του Lyapunov, και μορφές αυτών για ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία  $\kappa$ -διαστάτων τυχαίων διανυσμάτων.

## Βιβλιογραφία

- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*, Wiley, New York, 2nd edition.
- Chow, Y.S., Teicher, H. (1988). *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Chung, K.L. (1974). *A course in Probability Theory*, Academic Press, New York, 2nd edition.
- Durrett, R. (2010). *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press.
- Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1., Wiley, New York.
- Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2., Wiley, New York.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.
- Παπαδάτος Ν. (2006). *Θεωρία Πιθανοτήτων*, Αθήνα.
- Χελιώτης, Δ. (2015) *Ένα δεύτερο μάθημα στις Πιθανότητες*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος.